

Module 1 - Introduction aux probabilités

STT-1000 Probabilités et statistique

Département de mathématiques et de statistique



UNIVERSITÉ
LAVAL

Importance de la statistique

Importance de la statistique

Pourquoi un cours de statistique

Conception ou analyse de systèmes ou phénomènes aléatoires, i.e. non déterministes.

Exemples :

- fiabilité d'une machine ;
- quantité de pluie reçue dans un bassin versant ;
- demande en électricité d'un grand complexe de serveurs ;
- nombre de tomates produites par un plant.

Probabilités vs. statistique ?

Probabilités

Outil mathématique formel servant à décrire et modéliser les comportements aléatoires.

On connaît les "paramètres" du phénomène et on tente de décrire ce qu'on attend du phénomène en question. Exemple : on lance un dé équilibré à 6 faces et on veut savoir la probabilité d'obtenir un «3».

Probabilités vs. statistique ?

Probabilités

Outil mathématique formel servant à décrire et modéliser les comportements aléatoires.

On connaît les "paramètres" du phénomène et on tente de décrire ce qu'on attend du phénomène en question. Exemple : on lance un dé équilibré à 6 faces et on veut savoir la probabilité d'obtenir un «3».

Statistique

Étude quantitative des attributs d'une "population" à partir d'observations.

On ne connaît pas les "paramètres" du phénomène, c'est ce qu'on tente d'estimer. Exemple : on veut savoir si un dé est équilibré...

Probabilités vs. statistique ?

Probabilités

Outil mathématique formel servant à décrire et modéliser les comportements aléatoires.

On connaît les "paramètres" du phénomène et on tente de décrire ce qu'on attend du phénomène en question. Exemple : on lance un dé équilibré à 6 faces et on veut savoir la probabilité d'obtenir un «3».

Statistique

Étude quantitative des attributs d'une "population" à partir d'observations.

On ne connaît pas les "paramètres" du phénomène, c'est ce qu'on tente d'estimer.
Exemple : on veut savoir si un dé est équilibré...
Une bonne compréhension des probabilités et de la statistique est indispensable à la prise de décision en présence d'incertitude.

Expérience aléatoire

Expérience aléatoire

Expérience aléatoire $\mathcal{E}$

Expérience dont le résultat dépend du hasard, ne pouvant être prédit avec certitude.

Espace échantillonnal $\mathcal{U}$

Ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience $\mathcal{E}$.

- $\mathcal{U}$ discret : Si $\mathcal{U}$ est fini ou dénombrable
(ex : la liste des entiers)
- $\mathcal{U}$ continu : Si $\mathcal{U}$ est non dénombrable
(ex : un intervalle de valeurs sur la droite réelle)

Expérience aléatoire

Quel est l'espace échantillonnal ?

- $\mathcal{E}_1$: on lance un dé et on note le chiffre sur le dessus ;
- $\mathcal{E}_2$: on pige une carte parmi les quatre rois d'un jeu standard ;
- $\mathcal{E}_3$: on compte le nombre de véhicules traversant un pont durant une heure ;
- $\mathcal{E}_4$: on mesure la quantité de pluie (en mm) reçue à une station météo au cours de l'automne.

Expérience aléatoire

Événement

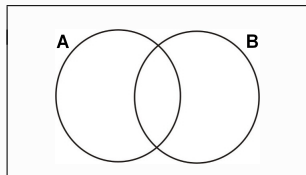
Sous-ensemble de l'espace échantillonnal $\mathcal{U}$. On utilise une lettre majuscule pour l'identifier.

Retour aux expériences précédentes :

- $\mathcal{E}_1 : A = \text{«Le dé indique un nombre pair»} = \{2, 4, 6\}$
- $\mathcal{E}_2 : B = \text{«On pige un roi noir»} = \{R_{\spadesuit}, R_{\clubsuit}\}$
- $\mathcal{E}_3 : C = \text{«Moins de 100 véhicules traversent le pont»} = \{0, 1, 2, \dots, 99\}$
- $\mathcal{E}_4 : D = \text{«La station reçoit plus de 150 mm de pluie»} = (150, \infty)$

Expérience aléatoire

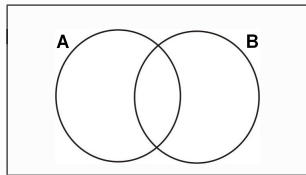
1) Complément de A : $\overline{A}$



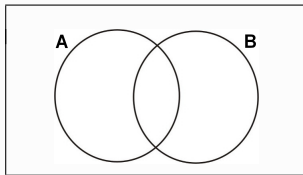
2) Inclusion de B dans A : $B \subset A$



3) Intersection de A et B : $A \cap B$



4) Union de A et B : $A \cup B$



Expérience aléatoire

Autres éléments importants

- L'**ensemble vide** est l'ensemble qui ne contient aucun élément. Dénnoté $\emptyset$
- $\emptyset$ est inclus dans tout ensemble A
 $\emptyset \subset A, \forall A$
- Tout ensemble A est inclus dans $\mathcal{U}$
 $A \subset \mathcal{U}, \forall A$
- Deux ensembles A et B sont **égaux** si, et seulement si, A est un sous-ensemble de B et B est un sous-ensemble de A .
 $A = B \iff A \subset B \text{ et } B \subset A$
- $A \subset B$ et $B \subset C$ implique $A \subset C$
- L'ordre des éléments dans un ensemble n'a pas d'importance
 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ est le même ensemble que $A = \{6, 5, 4, 3, 2, 1\}$

Expérience aléatoire

Lois d'identités

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$$

$$A \cap \mathcal{U} = A$$

Lois de De Morgan

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Lois associatives

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Lois distributives

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Expérience aléatoire

Événements mutuellement exclusifs

Des événements sont **mutuellement exclusifs** si toutes leurs combinaisons possibles d'intersections sont vides, c'est-à-dire lorsqu'**au plus un** de ces événements peut se produire à la fois.

Expérience aléatoire

Événements mutuellement exclusifs

Des événements sont **mutuellement exclusifs** si toutes leurs combinaisons possibles d'intersections sont vides, c'est-à-dire lorsqu'**au plus un** de ces événements peut se produire à la fois.

En d'autres termes, A, B et C sont mutuellement exclusifs, si

- $A \cap B = \emptyset$
- $A \cap C = \emptyset$
- $B \cap C = \emptyset$
- $A \cap B \cap C = \emptyset$

QUIZ!

Les événements suivants sont-ils mutuellement exclusifs?

- $\mathcal{E}_1$: Lancer d'un dé.

Soient A = «obtenir un nombre pair», $B = \{5\}$ et $C = \{1\}$.

- $\mathcal{E}_4$: Mesurer la quantité de pluie.

A = «La station reçoit plus de 150 mm»,

B = «La station reçoit moins de 175 mm» et

C = «La station reçoit entre 200 et 300 mm».

Probabilités

Définition. Soit une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ et son espace échantillonnal $\mathcal{U}$. Si un événement A est défini dans $\mathcal{U}$, alors la **probabilité de A , notée $P(A)$** , est un nombre réel respectant les axiomes suivants :

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\mathcal{U}) = 1$
3. Pour toute suite d'événements **mutuellement exclusifs** $A_1, A_2, \dots, A_k$ définis dans $\mathcal{U}$, on a

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k)$$

4. L'axiome 3 reste vrai quand $k \rightarrow \infty$: $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Spécification des probabilités

Comment peut-on déterminer des probabilités ?

- estimations basées sur des observations

Spécification des probabilités

Comment peut-on déterminer des probabilités ?

- estimations basées sur des observations
- analyse des conditions expérimentales

Spécification des probabilités

Comment peut-on déterminer des probabilités ?

- estimations basées sur des observations
- analyse des conditions expérimentales
- modèles probabilistes et/ou hypothèses

Résultats découlant des axiomes

Les résultats qui suivent sont des conséquences des 4 axiomes définissant une probabilité.

- **Théorème 1.1** : $P(\emptyset) = 0$

[$\mathcal{U}$ et $\emptyset$ sont mutuellement exclusifs, $\mathcal{U} \cup \emptyset = \mathcal{U}$ et $P(\mathcal{U}) = 1$...]

Résultats découlant des axiomes

Les résultats qui suivent sont des conséquences des 4 axiomes définissant une probabilité.

- **Théorème 1.1** : $P(\emptyset) = 0$
[$\mathcal{U}$ et $\emptyset$ sont mutuellement exclusifs, $\mathcal{U} \cup \emptyset = \mathcal{U}$ et $P(\mathcal{U}) = 1 \dots$]
- **Théorème 1.2** : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
[A et $\bar{A}$ sont mutuellement exclusifs et $\mathcal{U} = A \cup \bar{A} \dots$]

Résultats découlant des axiomes

Les résultats qui suivent sont des conséquences des 4 axiomes définissant une probabilité.

- **Théorème 1.1** : $P(\emptyset) = 0$
[$\mathcal{U}$ et $\emptyset$ sont mutuellement exclusifs, $\mathcal{U} \cup \emptyset = \mathcal{U}$ et $P(\mathcal{U}) = 1 \dots$]
- **Théorème 1.2** : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
[A et $\bar{A}$ sont mutuellement exclusifs et $\mathcal{U} = A \cup \bar{A} \dots$]
- **Théorème 1.3** : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Résultats découlant des axiomes

Les résultats qui suivent sont des conséquences des 4 axiomes définissant une probabilité.

- **Théorème 1.1** : $P(\emptyset) = 0$
[$\mathcal{U}$ et $\emptyset$ sont mutuellement exclusifs, $\mathcal{U} \cup \emptyset = \mathcal{U}$ et $P(\mathcal{U}) = 1 \dots$]
- **Théorème 1.2** : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
[A et $\bar{A}$ sont mutuellement exclusifs et $\mathcal{U} = A \cup \bar{A} \dots$]
- **Théorème 1.3** : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- **Théorème 1.4** :

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = & P(A) + P(B) + P(C) \\ & - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ & + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Résultats découlant des axiomes (suite)

- **Théorème 1.5** : Généralisation de 1.4 à k événements :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k P(A_i) - \sum_{i=1}^k \sum_{j=i+1}^k P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{k-1} P\left(\bigcap_{i=1}^k A_i\right)$$

Résultats découlant des axiomes (suite)

- **Théorème 1.5** : Généralisation de 1.4 à k événements :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k P(A_i) - \sum_{i=1}^k \sum_{j=i+1}^k P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{k-1} P\left(\bigcap_{i=1}^k A_i\right)$$

- **Théorème 1.6** : Si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$.

[$B = (\bar{A} \cap B) \cup A$, et $(\bar{A} \cap B)$ et A sont mutuellement exclusifs ...]

QUIZ!

Vous achetez un nouveau téléphone.

Définissons les événements suivants :

A : La carte SIM est défectueuse.

B : La batterie a une autonomie insuffisante.

Chez ce fournisseur, $P(A) = 0,05$, $P(B) = 0,20$ et $P(A \cup B) = 0,23$.

- a) Quelle est la probabilité que votre batterie dure suffisamment longtemps ?

- b) Quelle est la probabilité que les deux problèmes soient présents sur le téléphone que vous avez acheté ?

Exemple 2 suite

Dans l'exemple précédent, quelle est la probabilité qu'aucun des deux problèmes n'affecte votre téléphone ?

(Indice : Tracez le diagramme de Venn de ces ensembles en inscrivant les probabilités dans les régions représentées.)

Rappel : $P(A) = 0,05$, $P(B) = 0,20$ et $P(A \cup B) = 0,23$.

Exemple 3

À l'Université ABC,

- 55% des étudiants portent des lunettes,
- 70% des étudiants possèdent un portable,
- 75% des étudiants sont satisfaits de leurs études.

Si on choisit un étudiant au hasard dans cette université, pouvez-vous déterminer la probabilité qu'il s'agisse...

(i) d'un étudiant qui ne porte pas de lunettes?

(ii) d'un étudiant avec lunettes, satisfait de ses études?

Exemple 3 (suite)

On vous informe également qu'à l'Université ABC,

- 35% des étudiants portent des lunettes et possèdent un portable,
- 30% portent des lunettes, sont satisfaits de leurs études et possèdent un portable,
- 5% portent des lunettes, sont insatisfaits de leurs études et n'ont pas de portable,

Pouvez-vous maintenant déterminer la probabilité qu'un étudiant choisi au hasard soit...

(iii) un étudiant avec lunettes, satisfait de ses études ?

(iv) sans lunettes et satisfait de ses études ?

(v) sans lunettes et satisfait de ses études et possédant un portable ?

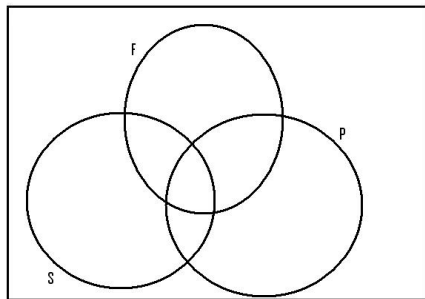
(vi) une personne satisfaite ou ayant des lunettes ?

Exemple 3 : piste de solution

Remplir toutes les zones mutuellement exclusives d'un diagramme de Venn.

L = «l'étudiant porte des lunettes», O = «l'étudiant possède un portable» et S = «l'étudiant est satisfait de ses études».

Rappel des données : $P(L) = 0,55$; $P(O) = 0,70$; $P(S) = 0,75$; $P(L \cap O) = 0,35$; $P(L \cap O \cap S) = 0,30$; $P(L \cap \bar{O} \cap \bar{S}) = 0,05$.



Exemple 3 : des infos partielles

- (vii) Si on vous disait que l'étudiant pigé est satisfait de ses études, pourriez-vous déterminer la probabilité qu'il porte des lunettes?

- (viii) Sauriez-vous déduire de vos informations la probabilité qu'un étudiant avec lunettes choisi au hasard possède un portable?

Pour faire ces calculs, vous devez utiliser une information partielle, qui réduit l'espace échantillonnal. Vous calculerez des *probabilités conditionnelles*...

Probabilités conditionnelles

Probabilité conditionnelle

Soient A et B deux événements dans $\mathcal{U}$ avec $P(B) > 0$. Alors la **probabilité conditionnelle** de A sachant que B s'est réalisé est

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Propriétés

Une probabilité conditionnelle a toutes les propriétés d'une probabilité :

1. $0 \leq P(A|B) \leq 1$

2. $P(\mathcal{U}|B) = P(B|B) = 1$

3. Soit $A_1, \dots, A_k$ une suite d'événements **mutuellement exclusifs**. Alors

$$P\left(\bigcup_{i=1}^k A_i \middle| B\right) = \sum_{i=1}^k P(A_i|B).$$

4. La propriété 3 demeure vraie quand $k \rightarrow \infty$.

Règle de multiplication

On peut utiliser la définition de probabilité conditionnelle pour déduire la valeur de $P(A \cap B)$:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \Leftrightarrow \quad P(A \cap B) = P(A|B)P(B).$$

On appelle parfois cette formule “règle de multiplication”.

Exemple 4

- 70% des pièces électroniques que vous utilisez viennent de l'usine A et les autres pièces viennent de l'usine B.
 - 25% de toutes les pièces sont défectueuses.
 - 10% de toutes les pièces viennent de l'usine A et sont défectueuses.
- a) On vous donne une pièce qui vient de l'usine A. Quelle est la probabilité qu'elle soit défectueuse ?
- b) On vous donne une pièce défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'usine B ?

QUIZ!

Supposons $P(B) > 0$.

- Que vaut $P(A|B)$ si $B \subset A$?
- Que vaut $P(A|B)$ si $A \subset B$?
- Que vaut $P(A|B)$ si A et B sont mutuellement exclusifs?

Indépendance de deux événements

Je roule un dé, puis je lance une pièce de monnaie.

Soit les événements

A = “le dé indique 6”, et

B = “la pièce indique face”.

Le fait que A se réalise ou non n’a aucun impact sur la probabilité d’obtenir pile ou face!

On dira alors que A et B sont **indépendants**. Voyons une définition plus mathématique de l’indépendance d’événements.

Indépendance de deux événements

Soient A et B deux événements de $\mathcal{U}$. On dit que A et B sont **indépendants**, noté $A \perp B$, si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Impact sur les probabilités conditionnelles

Supposons que $P(B) > 0$, de sorte que $P(A|B)$ est bien définie.

Si A et B sont indépendants, alors

$$P(A|B) = P(A)$$

À l'inverse, si cette condition est remplie, alors A et B sont indépendants.

Questions

1. Des événements mutuellement exclusifs sont-ils indépendants en général?
2. Si $A \subset B$, a-t-on que A et B sont indépendants, en général?

Généralisation à k événements

Définition. On dit de k événements qu'ils sont **mutuellement indépendants** si, et seulement si, les probabilités de **toutes** les intersections de $2, 3, \dots, k$ d'entre eux sont égales aux produits de leurs probabilités respectives.

Par exemple, A, B, C sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \text{ ET}$$

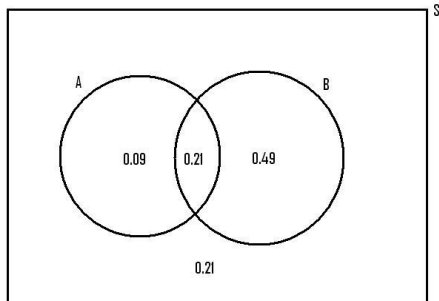
$$P(A \cap C) = P(A)P(C) \text{ ET}$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C) \text{ ET}$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C).$$

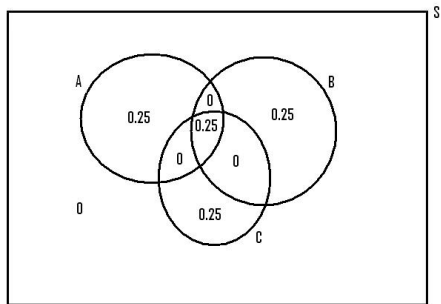
Exemple 5

A et B sont-ils indépendants ?



Exemple 6

Il est possible que $A \perp B$, $A \perp C$ et $B \perp C$, mais que A, B, C ne soient pas indépendants. Par exemple



Partitionner l'espace échantillonnal

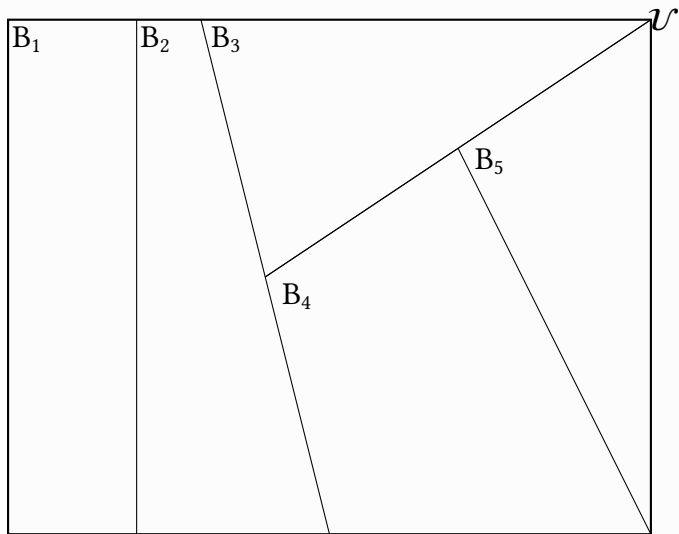
Plusieurs problèmes de calcul de probabilités deviennent plus simples si on les divise en plusieurs morceaux.

Partition de l'espace échantillonnal

On dit que $B_1, B_2, \dots, B_k$ forment une **partition de $\mathcal{U}$** si et seulement si

1. ils sont mutuellement exclusifs, i.e., $B_i \cap B_j = \emptyset, \forall i \neq j$
et
2. leur union est $\mathcal{U}$: $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k = \mathcal{U}$.

Exemple d'une partition de $\mathcal{V}$



Utilité de partitionner $\mathcal{U}$

Lemme

Si $B_1, \dots, B_k$ forment une partition de $\mathcal{U}$ et A est un événement dans $\mathcal{U}$, alors

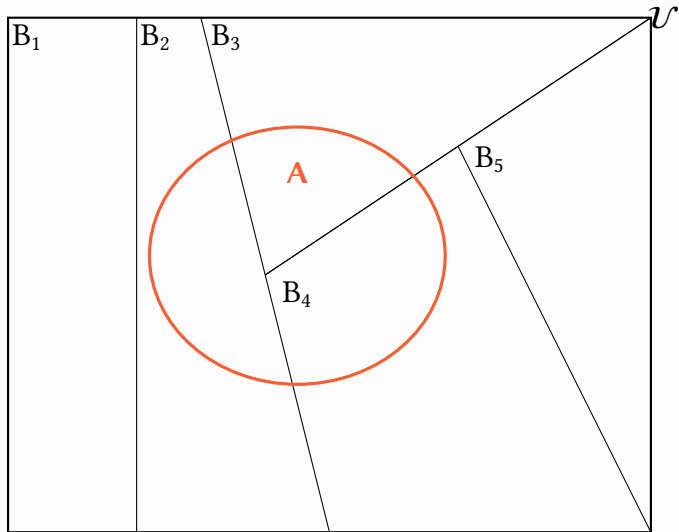
$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_k).$$

Puisque $(A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = \emptyset$, $\forall i \neq j$, on a que

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_k)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(A \cap B_i).$$

Exemple d'une partition de $\mathcal{V}$ (suite)



Conditionner sur une partition pour trouver $P(A)$

Théorème. Loi des probabilités totales

Soit A un événement dans $\mathcal{U}$ et $B_1, \dots, B_k$ une partition de $\mathcal{U}$. Alors

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + \dots + P(A \cap B_k) \\ &= P(B_1)P(A|B_1) + \dots + P(B_k)P(A|B_k) \\ &= \sum_{i=1}^k P(B_i)P(A|B_i) \end{aligned}$$

Cas particulier : Comme B et $\bar{B}$ forment une partition de $\mathcal{U}$, on a

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B}).$$

Exemple 7

Je suis de bonne humeur 75% du temps. Quand je suis de bonne humeur, j'enseigne bien 90% du temps. Quand je ne suis pas de bonne humeur, j'enseigne bien 20% du temps.

- a) Quelle est la probabilité que je ne sois pas de bonne humeur et que je n'enseigne pas bien ?

Exemple 7 (suite)

b) Quelle est la probabilité que j'enseigne bien ?

Exemple 8

Dans un certain pays,

- 50% des viaducs sont faits en béton de type A,
- 30% des viaducs sont faits en béton de type B et
- 20% des viaducs sont faits avec des matériaux autres que le béton.

On sait aussi que

- 90% des viaducs faits de béton de type A vont résister sans travaux majeurs pendant plus de 10 ans,
- cette proportion est de 80% chez les viaducs faits de béton de type B
- et de 70% chez les viaducs faits avec des matériaux autres que le béton.

Exemple 8 (suite)

Tracez un diagramme en arbre et un diagramme de Venn qui schématise cette situation.

Exemple 8 : Quelle est la probabilité qu'un viaduc pris au hasard dans ce pays résiste plus de 10 ans sans travaux majeurs ?

Quand l'information est donnée “à l'envers” ...

Pour plusieurs problèmes, on donne l'information sous la forme $P(A|B_i)$, mais on nous demande de calculer $P(B_i|A)$.

- Dans l'exemple de mon humeur (ex. 7), quelle est la probabilité que je sois de bonne humeur sachant que j'enseigne bien ?
- Dans l'exemple des viaducs (ex. 8), si un viaduc a résisté moins de 10 ans sans travaux majeurs, quelle est la probabilité qu'il soit fait de béton de type B ?

Théorème. Théorème de Bayes Soient A un événement dans $\mathcal{U}$ et $B_1, \dots, B_k$, une partition de $\mathcal{U}$. Alors

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^k P(A|B_i)P(B_i)}, \quad \forall j = 1, \dots, k.$$

Il s'agit d'un des résultats les plus importants de la théorie des probabilités.

Exemple 7 (suite)

Imaginons que j'enseigne bien aujourd'hui(!).

Quelle est la probabilité que je sois de bonne humeur, sachant cette information ?

QUIZ!

Retournons à l'exemple 8. Un pan de viaduc s'est effondré le mois passé, 8 ans après la construction. Quelle est la probabilité que ce viaduc soit fait de béton de type B ?

Permutation et combinaison

Permutation

Définition. Une **permutation** est un arrangement **ordonné** d'objets **distincts**.

Permutation

Définition. Une **permutation** est un arrangement **ordonné** d'objets **distincts**.

Exemple :

Il reste 3 gâteaux sur la table : chocolat, vanille et café. Deux personnes souhaitent en manger un. De combien de façons différentes peut-on assigner les gâteaux aux 2 personnes ?

Permutations - Formule générale

Permutation

Le nombre de permutations possibles de n objets pris r à la fois est donné par

$$P_r^n = n(n-1) \cdots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Permutations - Formule générale

Permutation

Le nombre de permutations possibles de n objets pris r à la fois est donné par

$$P_r^n = n(n-1) \cdots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Ce résultat vient du **principe de multiplication** : nous avons n choix d'objets pour la première position, $n-1$ choix d'objets pour la seconde position, ..., $n-r+1$ choix d'objets pour la r -ème position.

Permutations - Formule générale

Permutation

Le nombre de permutations possibles de n objets pris r à la fois est donné par

$$P_r^n = n(n-1) \cdots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Ce résultat vient du **principe de multiplication** : nous avons n choix d'objets pour la première position, $n-1$ choix d'objets pour la seconde position, ..., $n-r+1$ choix d'objets pour la r -ème position.

[Rappel : $n! = n(n-1)(n-2) \cdots 1$ et $0! = 1! = 1$ donc $P_n^n = n!$]

Exemples

- Dix pilotes sont disponibles pour assurer quatre liaisons aériennes. Combien d'options d'assignation de ces pilotes à ces liaisons a-t-on ?

Exemples

- Dix pilotes sont disponibles pour assurer quatre liaisons aériennes. Combien d'options d'assignation de ces pilotes à ces liaisons a-t-on ?
- Pour les mêmes 4 liaisons aériennes, on doit choisir 4 équipages de bord parmi 12 équipages disponibles.
De combien de façons différentes peut-on assigner les pilotes ET les équipages de bord aux 4 liaisons ?

Combinaisons

Définition. Une **combinaison** est un arrangement **non ordonné** d'objets **distincts**.

Combinaisons

Définition. Une **combinaison** est un arrangement **non ordonné** d'objets **distincts**.

Exemple :

Je dois choisir 2 de mes 3 meilleurs amis pour aller dans le Sud avec moi.

Combien d'options ai-je?

Combinaisons

Définition. Une **combinaison** est un arrangement **non ordonné** d'objets **distincts**.

Exemple :

Je dois choisir 2 de mes 3 meilleurs amis pour aller dans le Sud avec moi.
Combien d'options ai-je?

Soient a, b, c , mes trois meilleurs amis.

J'aurais $P_2^3 = 6$ permutations de ces 3 amis pris 2 à la fois ... mais je compterais (a, b) et (b, a) deux fois alors qu'il s'agit d'une seule et même option!

En fait je dois diviser P_2^3 par 2 pour obtenir 3 choix possibles, soient (a, b) , (a, c) ou (b, c) .

Combinaisons : Formule générale

Définition. Le nombre de combinaisons possibles de r objets pris parmi n est

$$\binom{n}{r} = C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Combinaisons : Formule générale

Définition. Le nombre de combinaisons possibles de r objets pris parmi n est

$$\binom{n}{r} = C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

D'où vient cette formule?

Soit x le nombre de façons de choisir r objets parmi n .

Alors on a que $P_r^n = x \times P_r^r = x \times r!$, car une permutation consiste tout d'abord à choisir r objets parmi les n , ensuite à permuter ces r objets.

Donc $P_r^n = xr!$

$$\Rightarrow x = P_r^n / r! = \frac{n!}{(n-r)!} \frac{1}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Exemples

- **Lotto 6/49** : On tire au hasard 6 des 49 nombres de 1 à 49, et l'ordre dans lequel les 6 nombres sont tirés ne compte pas. On a donc

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!43!} = \frac{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44}{6!} = 13\,983\,816$$

combinaisons possibles.

Loto-Québec indique d'ailleurs sur son site web que la probabilité de gagner le gros lot est de $1/13\,983\,816$.

Note : On aurait pu trouver aussi à l'aide de la règle de multiplication : 49 choix pour le 1er nombre, 48 pour le second, ... 44 pour le 6e, et ensuite on doit diviser par $6!$ car chaque combinaison est comptée $6!$ fois.

Exemples (suite)

- **Poker** : Au poker, une main consiste en 5 cartes tirées d'un jeu de 52 cartes distinctes. Il y a donc

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{5!47!} = \frac{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48}{5!} = 2\,598\,960$$

mains de poker distinctes.

Exemples (suite)

- **Poker, paires** : Quelle est la probabilité que la main obtenue soit une paire ?

Exemples (suite)

- **Comités** : Un groupe de 30 personnes doit choisir 4 représentants.
 - Combien y a-t-il de comités possibles?
 - Et si le comité est formé d'un président, d'un V-P, d'un trésorier, et d'un secrétaire?
 - Et si le comité est formé d'un président et de 3 autres membres?

Propriété importante

Théorème. Soient deux nombres réels x et y et un entier n . Alors

$$(x + y)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^r y^{n-r}.$$

On appelle ce théorème le *Théorème du binôme*.

Identités utiles

- $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$
- $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$
- $2^n = (1 + 1)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} 1^r 1^{n-r} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$

Réponses des exemples

Réponses des exemples (1/2)

- **Exemple 2 (suite) (aucun des deux problèmes) :** $1 - 0,23 = 0,77$.
- **Exemple 3 :** (i) 0,45; (ii) manque d'information; (iii) 0,45; (iv) 0,30; (v) manque d'information; (vi) 0,85; (vii) $P(L|S) = 0,45/0,75 = 0,6$; (viii) $P(O|L) = 0,35/0,55 \approx 0,636$.
- **Exemple 4 :** a) $0,10/0,70 = 1/7 \approx 0,143$; b) $0,15/0,25 = 0,6$.
- **Exemple 5 :** $P(A) = 0,30$, $P(B) = 0,70$, $P(A)P(B) = 0,21 = P(A \cap B) \Rightarrow A$ et B sont indépendants.
- **Exemple 6 :** A, B, C sont indépendants deux à deux, mais $P(A \cap B \cap C) = 0,25 \neq P(A)P(B)P(C) = 0,125 \Rightarrow$ pas mutuellement indépendants.

Réponses des exemples (2/2)

- **Exemple 7 : a)** $0,25 \times 0,80 = 0,20$; **b)** $0,75 \times 0,90 + 0,25 \times 0,20 = 0,725$; **(suite, Bayes)**
 $P(\text{bonne humeur}|\text{enseigne bien}) = \frac{0,90 \times 0,75}{0,725} = \frac{27}{29} \approx 0,931$.
- **Exemple 8 :** $P(\text{résiste} > 10 \text{ ans}) = 0,5 \times 0,9 + 0,3 \times 0,8 + 0,2 \times 0,7 = 0,83$.
- **Exemples (pilotes) :** $P_4^{10} = 5\,040$; **avec les équipages :** $5\,040 \times 11\,880 = 59\,875\,200$.
- **Exemples (poker, paires) :** $1\,098\,240 / 2\,598\,960 \approx 0,423$ **(42,3 %)**.
- **Exemples (comités) :** $27\,405$ comités; $P_4^{30} = 657\,720$ **(président, V-P, trésorier, secrétaire);**
 $30 \times \binom{29}{3} = 109\,620$ **(président et 3 autres membres)**.

Réponses des quiz

Réponses des quiz

- **Quiz (mutuellement exclusifs) :** $\mathcal{E}_1$ (dé) : oui, mutuellement exclusifs; $\mathcal{E}_4$ (pluie) : non ($A \cap B = (150, 175) \neq \emptyset$).
- **Quiz (téléphone) :** a) $P(\overline{B}) = 1 - 0,20 = 0,80$; b) $P(A \cap B) = 0,05 + 0,20 - 0,23 = 0,02$.
- **Quiz ($P(B) > 0$) :** $P(A|B) = 1$ si $B \subset A$; $P(A|B) = P(A)/P(B)$ si $A \subset B$; $P(A|B) = 0$ si A et B sont mutuellement exclusifs.
- **Quiz (viaduc effondré, résiste < 10 ans) :** $P(\text{type B} | \text{ne résiste pas}) = \frac{0,30 \times 0,20}{1 - 0,83} = \frac{6}{17} \approx 0,353$.

Bibliographie

Ce document est rédigé avec Beamer ainsi qu'une classe .cls fournie par Jérôme Soucy. Les diapositives sont adaptées des diapositives créées par Anne-Sophie Charest pour le cours STT-1000 ainsi que celles créées par Thierry Duchesne et Emmanuelle Reny-Nolin pour le cours STT-1900. Les graphiques proviennent de ces deux sources.

Pour signaler une erreur dans ce document, veuillez écrire à l'adresse : julien.miron@mat.ulaval.ca.